



# L'optimalité de l'OFDM en termes de performance en PAPR

Marwa Chaffi, Jacques Palicot, Rémi Gribonval

## ► To cite this version:

Marwa Chaffi, Jacques Palicot, Rémi Gribonval. L'optimalité de l'OFDM en termes de performance en PAPR. 25ème Colloque Grets 2015, Sep 2015, Lyon, France. hal-01165509

**HAL Id: hal-01165509**

**<https://hal.science/hal-01165509>**

Submitted on 19 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# L’optimalité de l’OFDM en termes de performance en PAPR

Marwa CHAFII<sup>1</sup>, Jacques PALICOT<sup>1</sup>, Rémi GRIBONVAL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CentraleSupélec/IETR  
35576 Cesson - Sévigné Cedex, France

<sup>2</sup>Inria Rennes - Bretagne Atlantique  
35042 Rennes Cedex, France

marwa.chafii@supelec.fr, jacques.palicot@supelec.fr  
remi.gribonval@inria.fr

**Résumé** – Les systèmes multi-porteuses, et en particulier leur structure de modulation, connaissent un intérêt croissant. Suivant la forme d’onde considérée, plusieurs mesures de performance peuvent changer comme le PAPR (*Peak-to-Average Power Ratio*), l’efficacité spectrale, le taux d’erreur ou la complexité d’implémentation. Dans ce papier, nous montrons que, sous certaines contraintes sur les formes d’ondes, l’OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) est une structure de modulation optimale en termes de PAPR.

**Abstract** – Multicarrier modulation systems, especially their modulation scheme, are knowing a growing interest. According to the waveform considered, several measures can change such as the PAPR, the spectral efficiency, the bit error rate, and the complexity of implementation. In this paper, we show that, under certain constraints on the modulation scheme, OFDM has an optimal PAPR performance.

## 1 Introduction

L’OFDM est un système multi-porteuses largement utilisé dans les applications filaires comme l’ADSL ou sans-fils telles que : le DVB-T/T2, le WiMAX, et le LTE, grâce à sa robustesse contre les canaux sélectifs en fréquence en comparaison avec les systèmes mono-porteuses. Cependant, l’OFDM souffre d’une grande variation de son enveloppe et cela introduit des distorsions non-linéaires au niveau de l’amplificateur de puissance, d’où l’introduction du PAPR, une variable aléatoire mesurant les fluctuations de la puissance du signal.

Dans ce papier, dont une version en anglais avec toutes les preuves détaillées a été soumise pour publication dans une revue [1], nous montrons analytiquement que, parmi tous les systèmes multi-porteuses (MCM) basés sur des fonctions de modulation à support temporel plus large ou égal à la période symbole, l’OFDM<sup>1</sup> est optimal en termes de PAPR. De plus, nous montrons que l’OFDM n’est pas le seul optimum, mais qu’il existe une large famille d’optimums que nous identifions. Finalement, nous déduisons que pour construire un système meilleur que l’OFDM en termes de PAPR, le support temporel d’au moins une porteuse doit être strictement plus petit que la période symbole. À notre connaissance, ceci est la première étude théorique sur l’optimalité de l’OFDM en termes de PAPR. Le reste de ce papier est structuré comme suit : la Section 2 définit le système multi-porteuses considéré dans les dérivations, et modélise le problème de réduction du PAPR

comme un problème d’optimisation. La solution de ce problème est présentée dans la Section 3. La Section 4 donne quelques applications pour illustrer les résultats théoriques. Finalement, la Section 5 conclut l’article et ouvre des perspectives de travail.

## 2 Description du système

### 2.1 Système GWMC

Nous considérons le système multi-porteuses à forme d’onde généralisée ou Generalized Waveforms for Multi-Carrier (GWMC) dont le signal transmis s’écrit

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n} \underbrace{g_m(t - nT)}_{g_{m,n}(t)}. \quad (1)$$

$M$  présente le nombre de porteuses.  $C_{m,n}$  est le symbole complexe d’entrée d’indice  $n$  modulé par la porteuse  $m$  et soit  $\sigma_C^2$  sa variance.  $T$  est la période symbole GWMC. Chaque transformée de modulation et le filtre de mise en forme sont modélisés par une unique fonction notée  $g_m \in L^2(\mathbb{R})$  (l’espace des fonctions de carré intégrable).

1. L’étude considère l’OFDM sans intervalle de garde, mais valable aussi pour l’OFDM avec un préfixe cyclique, puisque l’ajout de ce dernier n’ajoute pas de valeur supplémentaire sur le pic de puissance.

## 2.2 Problème d'optimisation associé à la réduction du PAPR

Supposons que les formes d'ondes  $(g_m)_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  du système GWMC satisfont les conditions suivantes :

$$A = \min_{m,t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2 > 0, \quad (2)$$

$$\text{et } B = \max_{m,t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)| < +\infty \quad (3)$$

Eq.(2) exprime que les versions translatées de chaque porteuse  $g_m$  se chevauchent en temps. Le support temporel de la forme d'onde  $g_m$  ne s'annule pas durant la période symbole. Eq.(3) exprime que les fonctions  $g_m$  ont une « décroissance » temporelle. À temps discret, nous considérons  $P$  le nombre d'échantillons par période symbole  $T$ , et on définit le PAPR du signal GWMC par :

$$\text{PAPR}_d = \frac{\max_{k \in \llbracket 0, P-1 \rrbracket} |X(k)|^2}{P_{\text{moy}}} \quad (4)$$

$$P_{\text{moy}} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K E(|X(k)|^2) \quad (5)$$

L'indice  $d$  correspond au contexte discret. La puissance moyenne  $P_{\text{moy}}$  est définie sur un temps d'intégration infini, parce ce que le scénario considéré suppose une transmission infinie dans le temps, mais l'observation est limitée à une seule période symbole GWMC. La CCDF (*Complementary Cumulative Distribution Function*) du PAPR du signal GWMC est approchée par la formule suivante [3] :

$$\Pr(\text{PAPR}_d \geq \gamma) \approx 1 - \prod_{k \in \llbracket 0, P-1 \rrbracket} [1 - e^{-x(k)\gamma}], \quad (6)$$

$$\text{avec } x(k) = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2}{P \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_m(k - nP)|^2}.$$

La norme  $\|g_m\|$  est définie comme :  $\|g_m\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_m(t)|^2 dt$ . Réduire le PAPR revient à réduire sa CCDF, qui est la probabilité que le PAPR dépasse une certaine valeur  $\gamma$ . En se basant sur ce fait, nous avons prouvé dans nos travaux précédents [2], que le problème de réduction du PAPR peut être formulé comme un Problème d'Optimisation à contraintes.

### Problème d'Optimisation (PO).

$$\begin{aligned} & \underset{(g_m)_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}}{\text{maximiser}} \quad \int_0^T \ln(1 - e^{-\frac{-\gamma \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2}{P \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_m(t-nT)|^2}}) dt, \\ & \text{sous les contraintes} \quad \text{Eq.(2) et Eq.(3).} \end{aligned}$$

## 3 Résultats théoriques

### 3.1 Analyse théorique

Dans le PO, les fonctions  $(g_m)_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  jouent le même rôle et seulement la somme  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_m,n(t)|^2$  intervient

dans la quantité que l'on veut maximiser. La maximisation se fait alors sur une seule fonction positive  $f(t)$ , telle que :

$$f(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}(t)|^2, \quad (7)$$

$$\text{et } \int_0^T f(\tau) d\tau = \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2. \quad (8)$$

La quantité maximisée devient :

$$\underset{f \in L^\infty}{\text{maximiser}} \quad \beta(f) = \int_0^T \ln(1 - e^{-\frac{-\gamma \int_0^T f(\tau) d\tau}{P \int_0^T f(\tau) d\tau}}) dt. \quad (9)$$

sous la contrainte  $\exists a = MA$  tel que  $f(t) \geq a > 0$ .

Nous remarquons que la fonction  $\beta(f)$  ne change pas si on multiplie la fonction  $f(t)$  par un scalaire. Alors, si le problème Eq.(9) a une solution optimale, il existe un ensemble infini de solutions optimales. De plus, notons  $\tilde{f}(t) := f(Tt)$ , on a  $\beta(f) := T\tilde{\beta}(\tilde{f})$  et  $\tilde{f} \geq a > 0$ . Maximiser  $\tilde{\beta}$  par rapport à  $\tilde{f}$  est alors équivalent à maximiser  $\beta$  par rapport à  $f$ . Par ailleurs, nous considérons la normalisation suivante :  $\frac{\gamma T}{P} \int_0^1 \tilde{f}(\tau) d\tau = 1$  qui correspond à  $\tilde{f}(t) = Cf(tT)$ , avec  $C = \frac{P}{\gamma \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2}$ . Ainsi, la nouvelle expression du PO est :

$$\underset{\tilde{f} \in L^\infty}{\text{maximiser}} \quad \tilde{\beta}(\tilde{f}) = \int_0^1 \ln(1 - e^{-\frac{1}{\tilde{f}(t)}}) dt. \quad (10)$$

$$\text{sous les contraintes} \quad \exists a \tilde{f} \geq a > 0 \quad (11)$$

$$\frac{\gamma T}{P} \int_0^1 \tilde{f}(\tau) d\tau = 1 \quad (12)$$

On définit les sous ensembles convexes de  $L^\infty$  :

- $F := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{*+} / \int_0^1 f(\tau) d\tau = \frac{P}{\gamma T} \right\}$ ,
- $F_a := F \cap \{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{*+} / f \geq a \}$ ,
- $F_+ := \bigcup_{a>0} F_a$ .

Pour caractériser les optimum du PO dans Eq.(10) sous les contraintes Eq.(11)-(12), on rappelle la définition de ses points stationnaires.

**Définition 1.** On dit qu'une fonction  $f^* \in F_a$  est un point stationnaire de  $\tilde{\beta}$  défini dans Eq.(10) sous les contraintes Eq.(11)-(12) si et seulement si pour tout  $\phi \in L^1 \cap L^\infty([0, 1])$  tel que :

$$\int_0^1 \phi(t) dt = 0 \quad (13)$$

$$\text{on a} \quad \left. \frac{d\tilde{\beta}(f^* + \epsilon\phi)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (14)$$

$L^1$  est l'espace de Lebesgue des fonctions intégrables. La solution du problème d'optimisation est organisée comme suit :

**Lemme 1.** Soit  $f_0$  l'unique solution de l'équation  $1 - 2f_0 + 2f_0 e^{\frac{1}{f_0}} = 0$ , ( $f_0 \approx 0.63$ ).

$\forall \tilde{f} \in F_{f_0}$ ,  $\forall \phi \in L^1 \cap L^\infty([0, 1])$  tel que Eq.(13) est vérifiée,

$$\text{on a} \quad \left. \frac{d^2 \tilde{\beta}(f^* + \epsilon\phi)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} \leq 0. \quad (15)$$

TABLE 1 – Valeurs de  $\gamma_{\max}$  pour différent nombre de porteuses  $M$  pour le système OFDM

$M$	8	32	64	126	256	512	1024
$\gamma_{\max}$ , in dB	11	17	20	23	26	29	32

**Lemme 2.** La constante  $f^* = \frac{P}{\gamma T}$  est l'unique point stationnaire de  $\tilde{\beta}$  définie dans Eq.(10) sur l'ensemble  $F_+$ .

**Corollaire 1.** La constante  $f^* = \frac{P}{\gamma T}$  est un maximum global de  $\tilde{\beta}$  dans Eq.(10) sous les contraintes Eq.(11)-(12) sur l'ensemble  $F_{f_0}$ .

Le lecteur peut se référer à [1], pour une preuve détaillée des Lemmes 1-2 et du Corollaire 1.

### 3.2 Discussion

La condition  $\forall \tilde{f} \in F_{f_0}$  citée dans les résultats précédents peut être exprimée en termes des fonctions de modulation  $(g_m)_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  comme suit :

$$\forall t \quad \gamma \leq \frac{P \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}(t)|^2}{f_0 \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2}, \quad (16)$$

ce qui veut dire que nos résultats sont valides pour les valeurs de  $\gamma$  inférieures à une valeur seuil  $\gamma_{\max}$ . Considérons le système OFDM par exemple : le module des formes d'ondes  $g_m$  correspond au filtre rectangulaire supposé d'énergie unitaire ( $\|g_m\|^2 = 1$ ), et  $P = M$  pour un échantillonnage critique. La valeur seuil est exprimée par :  $\gamma_{\max} = \frac{M}{f_0}$ . La Table 1 montre les valeurs de  $\gamma_{\max}$ , le seuil de validité de nos résultats, en fonction du nombre des porteuses  $M$ , pour le système OFDM. En pratique, le PAPR n'atteint pas ces valeurs de  $\gamma$  pour le nombre de porteuses  $M$  qui lui correspond ; les valeurs intéressantes du PAPR pour le dimensionnement d'un système sont observées à  $10^{-4}$ . En se basant sur les résultats théoriques précédents, nous déduisons des propriétés qui peuvent prédire le comportement de la distribution du PAPR pour le système GWMC en comparaison avec l'OFDM.

**Propriété 1.** (Condition suffisante d'optimalité) *Tout système GWMC satisfaisant Eq.(2)-(3) tel que :*

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2 = \text{constant par rapport à } t, \quad (17)$$

*a une performance globalement optimale parmi tous les systèmes GWMC satisfaisant Eq.(2)-(3) tel que Eq.(16) est vérifiée.*

**Corollaire 2.** (Optimalité de l'OFDM) *L'OFDM atteint une performance optimale en PAPR parmi tous les systèmes GWMC satisfaisant Eq.(2)-(3) tel que Eq.(16) est vérifiée. Il en va de même pour le système Walsh-Hadamard.*

**Corollaire 3.** *Tout système GWMC satisfaisant Eq.(2)-(3) et Eq.(16) tel que Eq.(17) n'est pas vérifiée, a une performance en PAPR plus faible que l'OFDM.*

**Propriété 2.** *Pour construire un système GWMC avec une performance en PAPR meilleure que l'OFDM, les fonctions de modulation doivent satisfaire au moins l'une des conditions suivantes :*

- i) *le système ne satisfait pas Eq.(2).*
- ii) *le système ne satisfait pas Eq.(16).*

En effet, le résultat dans Corollaire 3 est vrai quand les contraintes Eq.(2)-(3)-(16) sont vérifiées. En pratique, toutes les formes d'ondes satisfont Eq.(3), parce qu'elles sont bornées et ont un support temporel fini. De plus, on s'intéresse essentiellement aux  $g_m$  qui ont leur support autour de la période  $T$  (à quelques passages par zéro près). Alors on a :

- i) si une famille de fonctions  $(g_m)_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  ne satisfait pas Eq.(2), cela veut dire qu'il existe au moins un indice  $m_0 \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$  tel que  $g_{m_0}$  a un support temporel plus petit que la période symbole, cela veut dire que son amplitude s'annule au moins durant un intervalle de temps, alors  $g_{m_0}$  a un plus grand support fréquentiel et par la suite une plus faible localisation fréquentielle.
- ii) si Eq.(16) n'est pas satisfaite, pour un système GWMC défini, le PAPR est alors comparé aux valeurs de  $\gamma > \gamma_{\max}$ . Sachant que le PAPR est borné par un facteur de  $M$  [4] :  $\text{PAPR}_{\text{borne}} = \frac{\max_{m,n} |C_{m,n}|^2 B^2}{\sigma_C^2 A} M$ , la CCDF est alors égale à zéro quand  $\gamma > \text{PAPR}_{\text{borne}}$ . Ainsi, l'analyse est restreinte aux valeurs de  $\gamma$  entre  $\gamma_{\max}$  et  $\text{PAPR}_{\text{borne}}$ , ce qui ne représente pas un intervalle de grand intérêt, puisqu'en pratique le PAPR n'atteint pas ces grandes valeurs de  $\gamma$ .

## 4 Applications

Pour illustrer nos résultats, nous considérons trois variantes de l'OFDM, qui sont basées sur différentes familles de fonctions de modulation, et nous simulons la CCDF de leur PAPR. Une comparaison entre elles et l'OFDM est présentée.

### 4.1 Walsh-Hadamard-MC (WH-MC)

Au lieu d'utiliser la IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*) pour la modulation, on peut utiliser la transformée inverse de Walsh-Hadamard (IWHT) [8]. Les fonctions de modulation sont exprimées par :

$$g_m(k) = W_{q,p}(k)$$

$W_{q,p}$  sont les fonctions de Walsh et sont les colonnes de la matrice d'Hadamard de dimension  $M = 2^Q$ . Les fonctions de Walsh ont toutes le même module qui est constant dans le temps. Par Corollaire 2, WH-MC a la même performance optimale en PAPR que l'OFDM. Nous vérifions cette conclusion

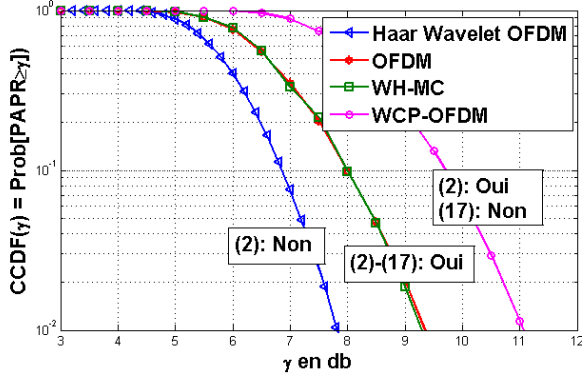


FIGURE 1 – CCDF du PAPR pour Haar Wavelet-OFDM, l'OFDM, le WH-MC et le WCP-OFDM.

par simulation. On génère 10000 réalisations du symbole WH-MC en utilisant la constellation QPSK (*Quadrature Phase-Shift Keying*). On considère 64 porteuses. Nous observons sur la Fig.1 que l'OFDM et le WH-MC ont la même distribution du PAPR, et donc la même performance. Ainsi, l'observation est consistante avec la prédiction théorique.

## 4.2 WCP-OFDM

Le WCP-OFDM (*Weighted Cyclic Prefix-OFDM*) est une variante de l'OFDM qui donne une version pondérée du signal Cyclic Prefix-OFDM, en utilisant des filtres de mise en forme non-rectangulaires. Le filtre prototype OBE (*Out-of-Band Energy*) défini dans [6], est utilisé dans le WCP-OFDM. Ce filtre satisfait Eq.(2)-(3) et son module dépend du temps. Suivant le Corollaire 3, la performance en PAPR du WCP-OFDM doit être plus faible que l'OFDM. Pour confirmer cette conclusion, nous simulons la CCDF du PAPR en considérant le filtre OBE comme montré dans la Fig.1. Nous remarquons que la courbe du WCP-OFDM est décalée vers la droite, en comparaison avec l'OFDM. Alors, l'OFDM a une meilleure performance en PAPR que le WCP-OFDM, ce qui s'accorde avec nos résultats théoriques.

## 4.3 Wavelet-OFDM

Wavelet-OFDM, ou OWDM (*Orthogonal Wavelet Division Multiplexing*) [7], est un système MCM basé sur la transformée en ondelettes [5]. Plusieurs types d'ondelettes peuvent être utilisées pour moduler le signal, comme les Daubechies, les Coiflets et les Symlets. Nous nous intéressons aux ondelettes de Haar, qui appartiennent à la famille des Daubechies. En passant d'une échelle à une autre, le support temporel de l'ondelette est divisé par deux. Pour une ondelette mère de support  $T$ , les ondelettes des échelles plus petites ont donc un support plus petit que la période symbole  $T$ , cette famille de fonctions ne satisfait pas alors la contrainte Eq.(2). Suivant la Propriété 2, on peut avoir une performance en PAPR meilleure que l'OFDM, c'est ce que nous vérifions par simulation dans la Fig.1 en ex-

trayant les coefficient de détails et d'approximation de l'ondelette de Haar au niveau maximum 6 pour  $M = 64$ . La courbe du Wavelet-OFDM est décalée vers la gauche, en comparaison avec l'OFDM. Ainsi, le Haar Wavelet-OFDM a une meilleure performance en PAPR que l'OFDM.

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous étudions le système GWMC basé sur des fonctions de modulation qui ne s'annulent pas durant la période symbole. Nous montrons que le PAPR est optimal quand la somme de ces fonctions est constante dans le temps, et qu'il existe une infinité de famille optimales dont l'OFDM fait partie. Avoir un meilleur PAPR que l'OFDM revient donc à réduire le support temporel de la forme d'onde.

Le prochain travail consiste à construire une forme d'onde qui réduit le PAPR en comparaison avec l'OFDM, en agissant sur le nombre d'intervalles qu'il faut annuler dans le temps tout en prenant en compte le compromis entre le PAPR et la localisation en fréquence.

## Remerciements

Ce travail a reçu un soutien du laboratoire d'excellence CominLabs, dans le cadre du projet Nb. ANR-10-LabX-07-01. Les auteurs tiennent également à remercier la région Bretagne, France, pour son soutien.

## Références

- [1] M. Chafii, J. Palicot et R. Gribonval. *Is OFDM an Optimal Multi-Carrier Modulation System in Terms of PAPR Performance ?*. Submitted, 2015. <https://hal-supelec.archives-ouvertes.fr/hal-01128714>
- [2] M. Chafii, J. Palicot et R. Gribonval. *Closed-form Approximations of the Peak-to-Average Power Ratio Distribution for Multi-Carrier Modulation and their Applications*. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2014.
- [3] M. Chafii, J. Palicot et R. Gribonval. *Closed-form Approximations of the PAPR distribution for Multi-Carrier Modulation Systems*. Eusipco, 2014.
- [4] M. Chafii, J. Palicot et R. Gribonval. *A PAPR Upper Bound of Generalized Waveforms for Multi-Carrier Modulation Systems*. ISCCSP, 2014.
- [5] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic press, 1999.
- [6] D. Roque. *Modulations Multiporteuses WCP-OFDM : évaluation des performances en environnement radiomobile*. Dissertation de thèse, Université de Grenoble, 2012.
- [7] S. Linfoot, M. Ibrahim, M. Al-Akaidi. *Orthogonal Wavelet Division Multiplex : An Alternative to OFDM*. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2007.
- [8] M. Bernhard, J. Speidel. *Multicarrier Transmission using Hadamard Transform for Optical Communications*. Photonic Networks, ITG Symposium, 2013.